《数学大观》

六、勾股定理中西证明

主 讲 人 ： 青 课

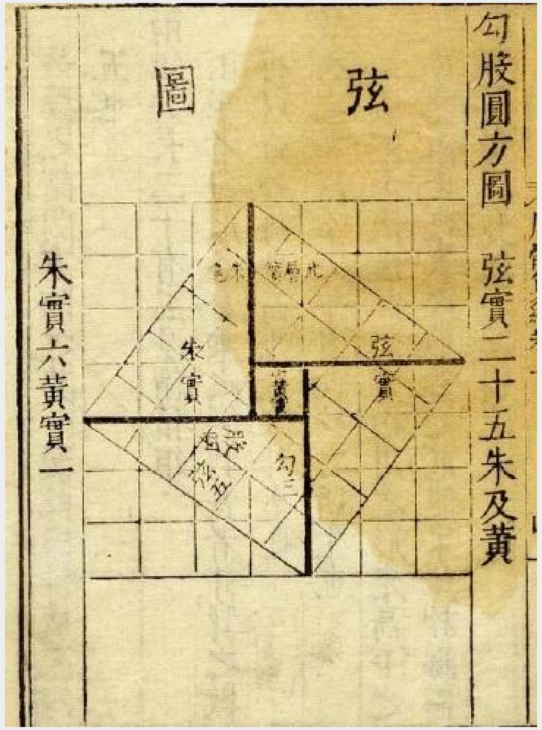
01

赵爽对勾股定理的证明

赵爽，一名婴，字君卿，三国时代吴国数学家，全面注《周髀算经》，其中“日高图注”奠定了重差术的理论基础。

《周髀算经》注中的“勾股圆方图注”共600余字，概括了两汉以来的勾股理论及其应用，对勾股定理进行了表述，并作了理论证明。

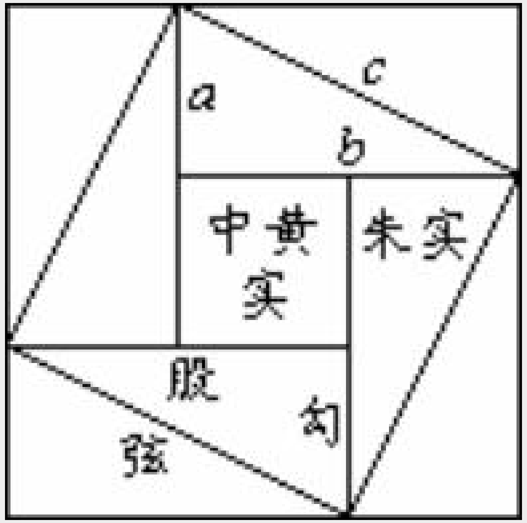
这也是我国数学家对勾股定理的最早证明，充分表现出中国数学的独特思想方法。



赵爽将勾股定理表述为：“句股各自乘，并之，为弦实。开方除之，即弦。”

其证明方法叙述为：

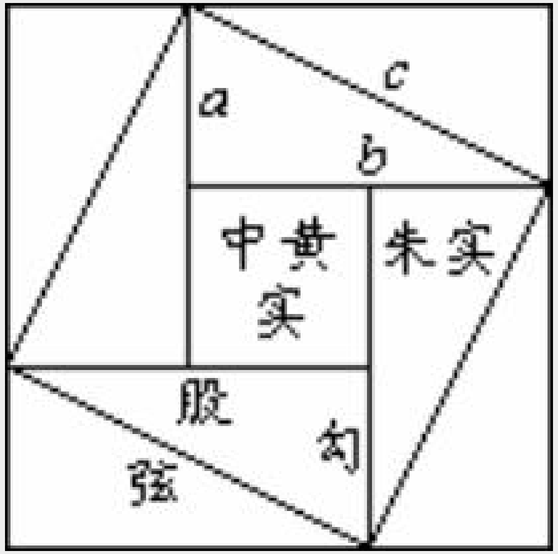
“按弦图，又可以句、股相乘为朱实二，倍之为朱实四，以句股之差自相乘为中黄实。加差实，亦成弦实。”



弦图由四个全等的勾股形和一个正方形所组成，设勾股形的三边分别为a，b，c，则正方形的边长等于勾股差，由右图和术文可得：

$2ab+(b-a)^2=c^2$

将(b-a)2 展开即得勾股定理。



（1）利用构造方法

对几何图形截、割、拼、补，利用面积或体积关系来证明，简洁、形象、直观，易于理解和掌握，且极富创新意识。

这种方法开创了中国出入相补原理的先河，成为中国“析理以辞，解题用图”的先导。

（2）以形证数，数形结合

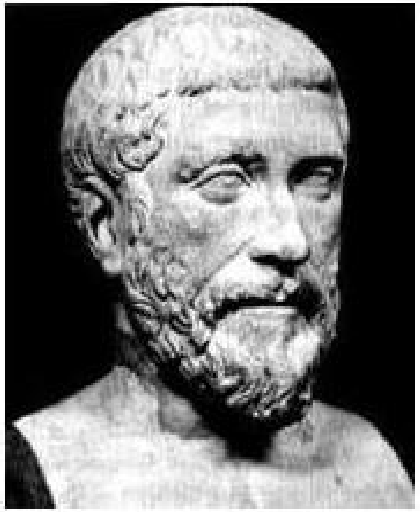
利用几何图形的面积与体积关系，来证明代数式之间的恒等关系，这种方法既具有严密性，又体现了数学的整体性，是数学研究的一种重要方法，也是数学发展的一个极其重要的条件。

02

西方对勾股定理的研究

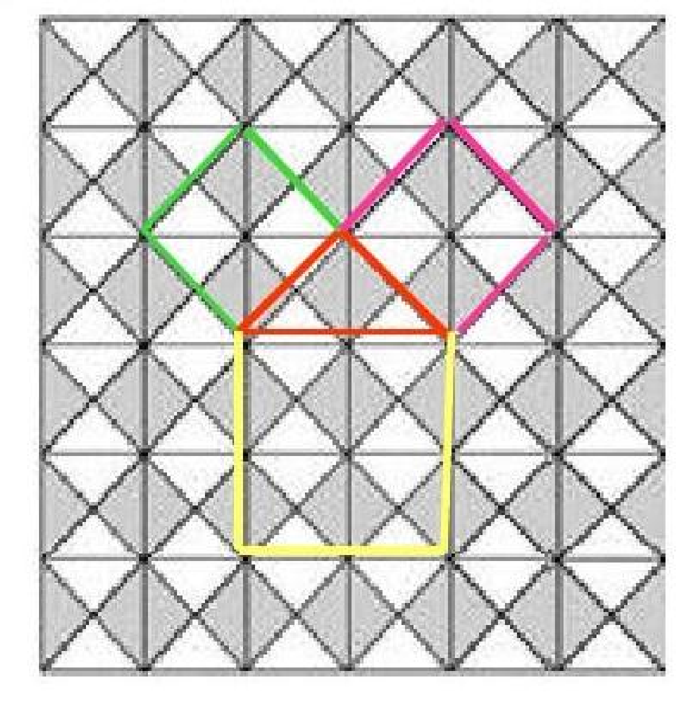
勾股定理在西方被称为毕达哥拉斯定理，相传是古希腊哲学家、数学家毕达哥拉斯（Pythagoras，约公元前580～约公元前500年）于公元前550年首先发现的。

据说当他证明了勾股定理以后，欣喜若狂，杀牛百头，以示庆贺。故西方亦称勾股定理为“百牛定理”。

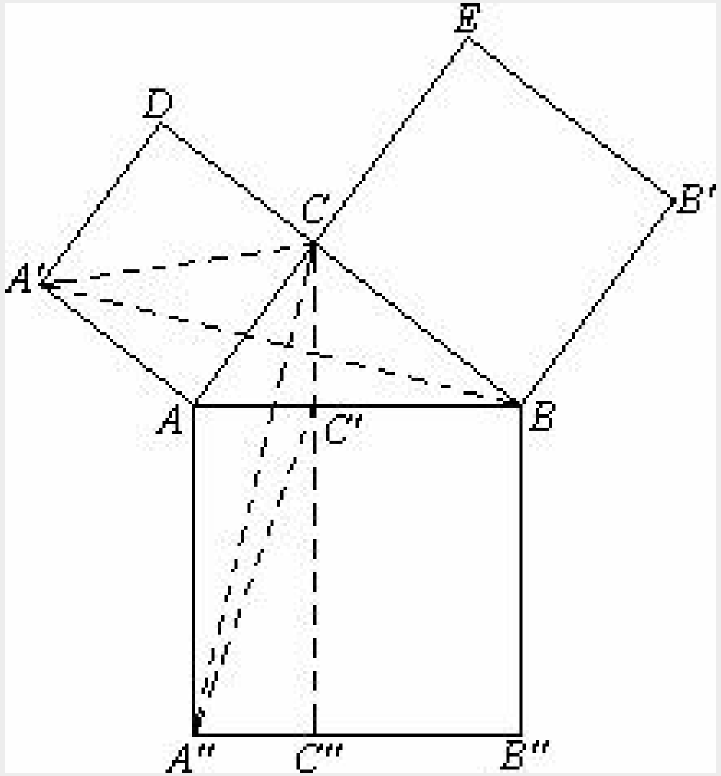


随毕达哥拉斯去发现

相传2500年前，毕达哥拉斯有一次在朋友家用砖铺成的地面中反映了直角三角形三边的某种数量关系。



著名的希腊数学家欧几里得（Euclid，公元前330—公元前275年）在巨著《几何原本》（第I卷，命题47）中给证明：



如图所示，分别以 $Rt\triangle ABC$ 的三边向外做正方形 $AA'DC, BB'EC$和$AA''B''B$,连接$A'B, A''C$

$\because AA' = AC, AB = AA'', \angle A'AB = \angle CAA''$

$\therefore \triangle ABA' \cong \triangle AA''C$（SAS）

过C作A”B”的垂线，

分别交AB，A”B”于C’和C”，

连接$A'C, A''C'$,

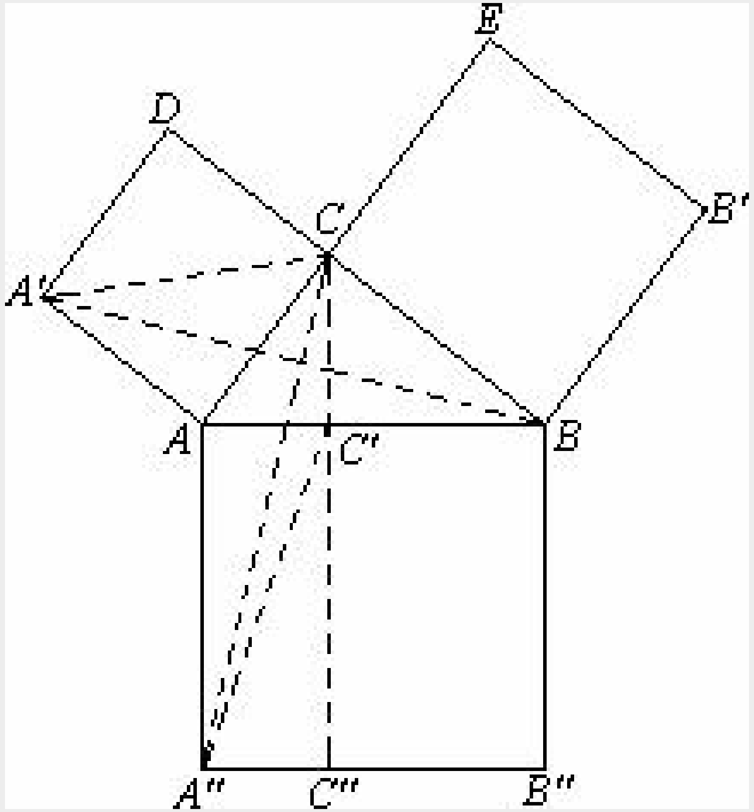
$\because S_{\Delta AA'B} = S_{\Delta AA'C}$(同底等高)

$S_{\Delta AA''C} = S_{\Delta AA''C'}$(同底等高)

而$\Delta ABA' \cong \Delta AA''C$

$\therefore S_{\Delta ABA'} = S_{\Delta AA''C}$

$\therefore S_{\Delta AA'C} = S_{\Delta AA''C'}$



易知：$S_{正方形ACDA'} = 2S\Delta_{AA'C}$

$S_{矩形AA''C''C'} = 2S\Delta_{AA''C'}$

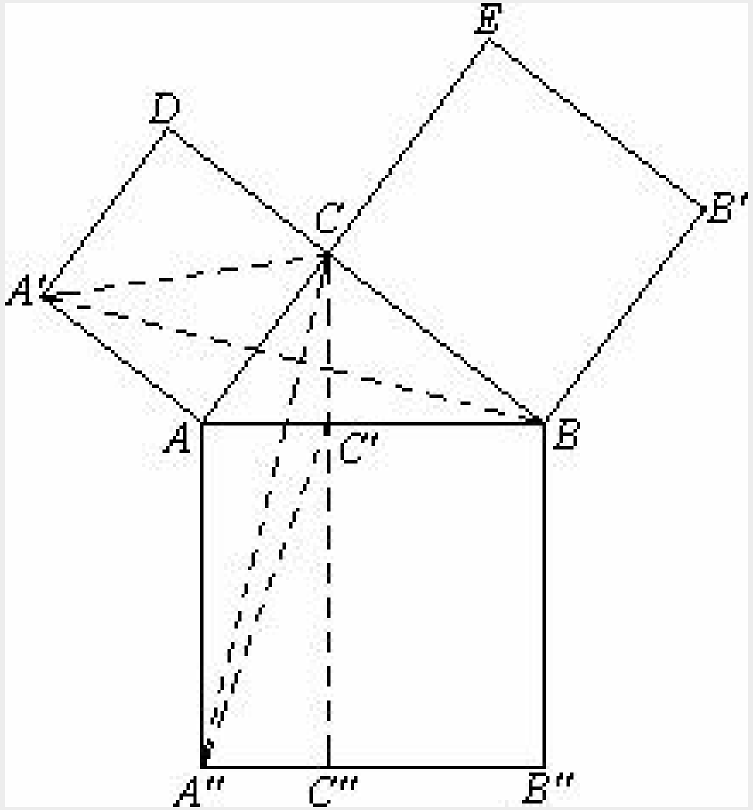
$\therefore S_{正方形ACDA'} = S_{矩形AA''C''C'}$

同理可得：

$S_{正方形BB'EC} = S_{矩形B''BC'C''}$

$\therefore S_{正方形AA''B''B} = S_{正方形ACDA'} + S_{正方形BB'EC}$

即：$AC^2 + BC^2 = AB^2$



美国第二十任总统伽菲尔德也曾给出过勾股定理的证明：

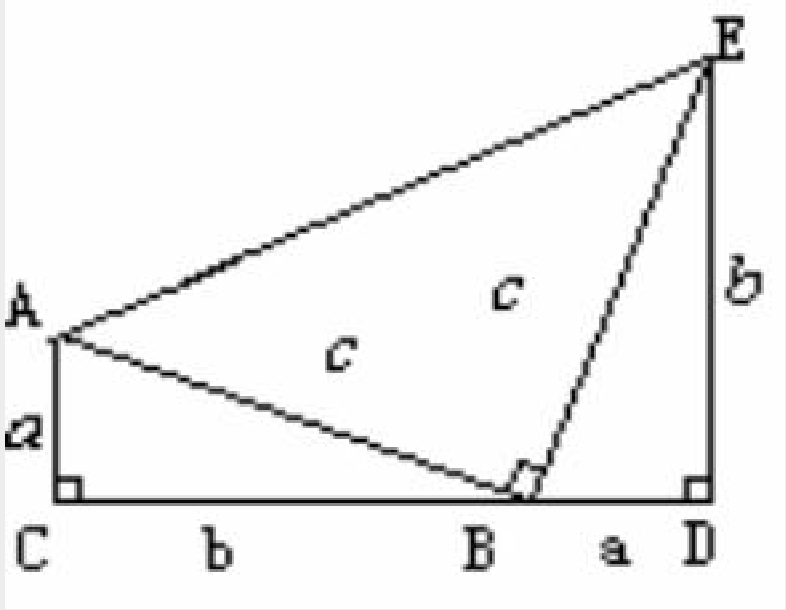
将$Rt\Delta ABC$竖起，得到$Rt\Delta BED$

$$S_{梯形ACDE}=\frac{1}{2}(a+b)^2=\frac{1}{2}\left(a^2+2ab+b^2\right)\cdots\cdots①$$

又$S_{梯形ACDE}=S_{\Delta ABC}+S_{\Delta EBD}+S_{\Delta ABE}$

$$=\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}ba+\frac{1}{2}c^2=\frac{1}{2}\left(2ab+c^2\right)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots②$$

比较以上二式，便得：$a^2+b^2=c^2$



勾股定理的推广：

平面上

欧几里得在《几何原本》中给出推广定理：

直角三角形斜边上的一个直边形，其面积为两直角边上两个与之相似的直边形面积之和。

⬇ 推出

以直角三角形的三边为直径作圆，则以斜边为直径所作圆的面积等于以两直角边为直径所作两圆的面积之和。

勾股定理的推广：
空间中

以直角三角形的三边为对应棱作相似多面体，则斜边上的多面体的表面积等于直角边上两个多面体表面积之和。

三个侧面两两垂直的四面体的各个侧面面积的平方和等于底面面积的平方。若以直角三角形的三边为直径分别作球，则斜边上的球的表面积等于两直角边上所作两球表面积之和。

感谢聆听